第10講　接線と法線の方程式

PART1　接線と法線の方程式

要点整理と公式

要点①　接線と法線

関数 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，微分係数 $f'(a)$ に等しい。よって，次のことが成り立つ。

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

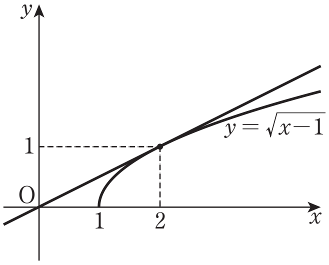
(ex) 曲線 $y=\sqrt{x-1}$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式

$f(x)=\sqrt{x-1}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \qquad f'(2)=\frac{1}{2}$$

よって，求める接線の方程式は

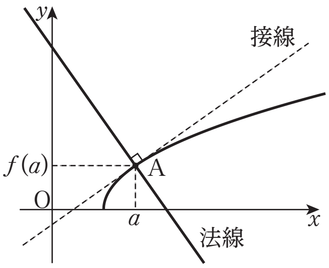
y　　$=$　$(x$　　$)$　　すなわち　$y=\frac{1}{2}x$



曲線上の点 A を通り，A における接線と垂直に交わる直線を，点 A におけるこの曲線の「　　　」という。

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の傾きは，$f'(a) \neq 0$ のとき　　　　　である。

よって，次のことが成り立つ。

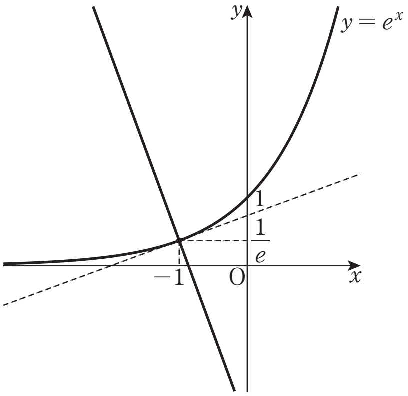


法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は

$f'(a) \neq 0$ のとき　　$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

(ex) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{e}\right)$ における法線の方程式



$f(x)=e^x$ とおくと

$$f'(x)=e^x \qquad f'(-1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

よって，求める法線の方程式は

$$y \qquad = \qquad (x \qquad)$$

すなわち　$y=-ex-e+\dfrac{1}{e}$

要点 ② 曲線外の 1 点から引いた接線の方程式

曲線外のある点 P から引いた接線を求めるときは，接点の x 座標を a などの文字でおき，接線の方程式を作り，その接線が点 P を通る，とするとよい。

(ex) 点 $(0,\ -1)$ から曲線 $y=\log x$ に引いた接線の方程式

$y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$

接点の座標を (　,　　　) とすると，接線の方程式は

$y \qquad = \quad (x \quad)$　すなわち　$y=\dfrac{1}{a}x+\log a-1$　……　①

①が点 $(0,\ -1)$ を通るので

$-1=\dfrac{1}{a}\cdot 0+\log a-1 \qquad \log a=0 \qquad$ よって　$a= \qquad =$

よって，求める接線の方程式は，①より

1 (1) 次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(i) $y=\dfrac{1}{x+2}$, $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ (ii) $y=-\sqrt{2x+3}$, $\mathrm{A}(0,\ -\sqrt{3})$

(iii) $y=\cos x$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ (iv) $y=\log x$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{e},\ -1\right)$

(2) 原点から曲線 $y=e^{2x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

接線・法線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における

接線の方程式 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線の方程式 $y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$ （ただし $f'(a)\neq 0$）

第10講 PART1 確認問題

1 曲線 $y=\frac{8}{x}$ 上の点 (2, 4) における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ ア

法線 $y=$ イ

① $2x$　② $x+2$

③ $-2x+8$　④ $\frac{1}{2}x+3$

2 曲線 $y=\sqrt{x-3}$ 上の点 (4, 1) における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ ウ

法線 $y=$ エ

① $2x-7$　② $-2x+9$

③ $\frac{1}{2}x-1$　④ $\frac{1}{2}x+1$

3 曲線 $y=2\sin x$ 上の点 $\left(\frac{2}{3}\pi,\ \sqrt{3}\right)$ における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ オ

法線 $y=$ カ

① $x-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$　② $-x+\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

③ $\sqrt{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\sqrt{3}$　④ $-\sqrt{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\sqrt{3}$

4 曲線 $y=\log x$ 上の点 $(e,\ 1)$ における接線と法線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

接線 $y=$ キ

法線 $y=$ ク

① $-ex$　② $\frac{1}{e}x$

③ $ex-e^2+1$　④ $-ex+e^2+1$

5 原点から曲線 $y=e^{-x}$ に引いた接線の方程式は $y=$ ケ である。答えは下の①～④のうちから選べ。

① ex　② $-ex$

③ $\frac{1}{e}x$　④ $-\frac{1}{e}x$

[MEMO]

第10講　接線と法線の方程式

PART1　接線と法線の方程式

1　(1)　次の曲線上の点 A における接線と法線の方程式を求めよ。

(i)　$y=\dfrac{1}{x+2}$，A$(-1,\ 1)$　　(ii)　$y=-\sqrt{2x+3}$，A$(0,\ -\sqrt{3})$

(iii)　$y=\cos x$，A$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$　　(iv)　$y=\log x$，A$\left(\dfrac{1}{e},\ -1\right)$

(2)　原点から曲線 $y=e^{2x}$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ より　$x=-1$ のとき　$y'=-1$

よって，接線の方程式は $y=-1\cdot(x+1)+1$　すなわち　$y=-x$

法線の方程式は $y=1\cdot(x+1)+1$　すなわち　$y=x+2$

(ii)　$y'=-\dfrac{1}{2}(2x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=-\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ より　$x=0$ のとき　$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，接線の方程式は $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}$

法線の方程式は $y=\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}$

(iii)　$y'=-\sin x$ より　$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，接線の方程式は $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi+\dfrac{1}{2}$

法線の方程式は $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$　すなわち　$y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{2}$

(iv)　$y'=\dfrac{1}{x}$ より　$x=\dfrac{1}{e}$ のとき　$y'=e$

よって，接線の方程式は $y=e\left(x-\dfrac{1}{e}\right)-1$　すなわち　$y=ex-2$

法線の方程式は $y=-\dfrac{1}{e}\left(x-\dfrac{1}{e}\right)-1$　すなわち　$y=-\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{e^2}-1$

(2)　$y=e^{2x}$ より $y'=2e^{2x}$

接点の座標を $(a,\ e^{2a})$ とすると，接線の方程式は

$y=2e^{2a}(x-a)+e^{2a}$　すなわち　$y=2e^{2a}x-2ae^{2a}+e^{2a}$　……　①

①が $(0,\ 0)$ を通るので

$0=-2ae^{2a}+e^{2a}$

$e^{2a}>0$ より　$2a=1$　　$a=\dfrac{1}{2}$

よって，求める接線の方程式は，①より $y=2ex$

第 10 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：④

[解説]

$y' = -\dfrac{8}{x^2}$ より，$x=2$ のとき，$y'=-2$

よって，接線の方程式は，

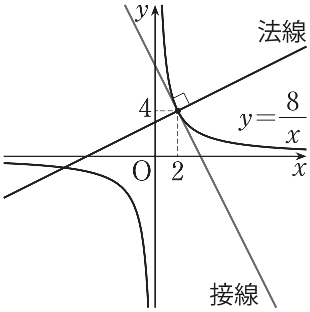
$y-4=-2(x-2)$ [A]

$\boldsymbol{y=-2x+8}$

法線の方程式は，

$y-4=\dfrac{1}{2}(x-2)$ [B]

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+3}$



[A]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[B]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）

2

[正解] ウ：③，エ：②

[解説]

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$ より，$x=4$ のとき，$y'=\dfrac{1}{2}$

よって，接線の方程式は，

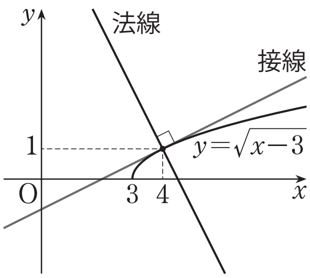
$$y-1=\frac{1}{2}(x-4) \quad \text{[C]}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-1}$$

法線の方程式は，

$$y-1=-2(x-4) \quad \text{[D]}$$

$$\boldsymbol{y=-2x+9}$$



[C]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[D]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）

3

[正解] オ：②，カ：①

[解説]

$y'=2\cos x$ より，$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$y'=-1$

よって，接線の方程式は，

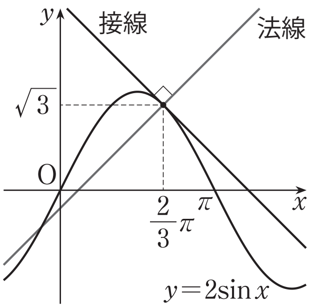
$$y-\sqrt{3}=-\left(x-\frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{[E]}$$

$$\boldsymbol{y=-x+\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}}$$

法線の方程式は，

$$y-\sqrt{3}=1\cdot\left(x-\frac{2}{3}\pi\right) \quad \text{[F]}$$

$$\boldsymbol{y=x-\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}}$$



[E]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[F]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）

4

[正解] キ：②，ク：④

[解説]

$y'=\dfrac{1}{x}$ より，$x=e$ のとき，$y'=\dfrac{1}{e}$

よって，接線の方程式は，

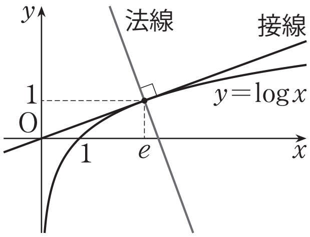
$$y-1=\frac{1}{e}(x-e) \quad \text{[G]}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x}$$

法線の方程式は，

$$y-1=-e(x-e) \quad \text{[H]}$$

$$\boldsymbol{y=-ex+e^2+1}$$



[G]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

[H]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，
$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$
（ただし，$f'(a)\neq 0$）

5

[正解] ケ：②

[解説]

$y=e^{-x}$ より，$y'=-e^{-x}$

接点の座標を $\left(a,\ e^{-a}\right)$ とすると，接線の方程式は，

$$y-e^{-a}=-e^{-a}(x-a)$$ [Ⅰ]

[Ⅰ]　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

すなわち

$$y=-e^{-a}x+ae^{-a}+e^{-a} \quad \cdots\cdots ①$$

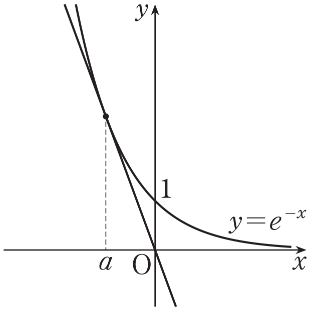
①が点 $(0,\ 0)$ を通るので，

$$0=ae^{-a}+e^{-a}$$

$$0=e^{-a}(a+1)$$

$e^{-a}>0$ より，$a+1=0$

$$a=-1$$

よって，求める接線の方程式は，①より，

$$\boldsymbol{y=-ex}$$